

19

Эквивалентность двух определений компактности

M -предкомп. $\Leftrightarrow \forall$ покрытие $\bigcup \alpha G_\alpha \supset M$,
 G_α - окр., $\exists G_{\alpha_k} : M \subset \bigcup_{k=1}^m G_{\alpha_k}$ (конечное подпокрытие)
 // Гейне-Бореля? //

$\Rightarrow$ Пусть $M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{\alpha_k}$; $\forall \{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$

$\overline{X_n}$ - замыкание.

1) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \neq \emptyset$. Предположим противное, $= \emptyset$.

$$M = M \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \setminus \overline{X_n}) \Rightarrow M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \setminus \overline{X_n}) =$$

$$= M \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = \emptyset = (?) \text{ т.к. } x_N \in X_n, n = \overline{1, N}$$

2) $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n}$

2.1) x входит бесконечно раз $\Rightarrow$ все

2.2) x входит конечное число раз $\Rightarrow \exists$ окр. подмнож.

$\Rightarrow$ От противного. $\exists G_\alpha$, нельзя выбрать конечное подпокрытие. M -предкомп. $\Rightarrow \exists$ конечная ε -сет.

$\varepsilon_k = \frac{1}{2^k}$, $M \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B(x_i, \varepsilon_2) \Rightarrow \exists (x_{i_2}, \varepsilon_2)$ - нельзя покрыть кон. числом. И т.д. Возьмем $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Можно выделить друг из друга n -ть, x -ся к x . $\exists G_\beta \ni x \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists N: \forall n \geq N, x_n \in G_\beta \Rightarrow$ шар $B(x_N, \varepsilon_N)$ можно покрыть G_β . (!!) ЧТД. ■